EERIE - ESA IGELEC - ESIGELEC

I C A R E

Un concours pour trois écoles

MATHS 1- ANALYSE
TOUTES FILIERES

(Durée 4 heures)

EXERCICE

1°) On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{1+t^2} dt$

Montrer qu'elle est convergente, mais non absolument convergente.

2°) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2}$ dt est convergente, puis la calculer.

PROBLEME

Les fonctions considérées dans ce problème sont des fonctions réelles de variables réelles. On note (a_n) $n \in \mathbb{N}$ la suite de terme général a_n, $[a_n]_{n \geq 0}$ la série de terme général a_n.

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) $x(2-x)y' + (1-x)y = 1$.

Les trois parties du problème peuvent être traitées de façon indépendante à l'exception de la question II 4) où l'on pourra utiliser les résultats de la partie I.

I. 1°) Intégrer l'équation différentielle (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty,0[$, $I_2=]0,2[$, $I_3=]2,+\infty[$

2°)

a) Montrer qu'il existe une solution φ_2 de (E) sur I_2 admettant une limite finie quand $x \to 0$, $x>0$

b) Montrer que φ'_2 admet une limite finie quand $x \to o$, $x>o$, que l'on calculera

[(Pour 2°a) et 2°b), on pourra poser $\forall x \in I_2$, $t = \text{Arccos}(1-x)$]

c) En déduire qu'il existe une solution pour (E) sur [0,2[

3°) Par une démarche analogue à celle de la question précédente, montrer qu'il existe une solution pour (E) sur]-∞,0] .

En déduire l'existence d'une solution unique φ de (E) sur]-∞,2[.

II. **1°)** Montrer qu'il existe une unique série entière $[a_n x^n]_{n\geq o}$ de rayon de convergence R>0 dont la somme est solution de (E) sur l'intervalle]-R,R[. (On ne cherchera pas à expliciter la somme de cette série entière).

Préciser les valeurs de a_n, $n \in \mathbb{N}$ et R.

On notera $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout réel x pour lequel la série converge.

2°) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n R^n$ et $v_n = a_n(-R)^n$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\frac{1}{n} < u_n < \frac{1}{n^{1/4}}$

b) Conclure quant à la convergence ou la divergence des séries $[u_n]n \geq 0$ et $[v_n]\, n \geq 0$.

3°) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bar{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^* \setminus\{1\}$, $\forall t \in [0,1]$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k t^k = \bar{S}_n t^{n+1} - \bar{S}_{n+p} t^{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \bar{S}_k \left(t^{k+1} - t^k\right)$$

b) Prouver la convergence uniforme de la série $[v_n t^n]_{n\geq o}$ sur [0,1]

c) En déduire la continuité de f en x = - R.

4°) Montrer que f est de classe C^1 sur l'intervalle [-2,2[. (Pour cette question, on pourra utiliser les résultats de la partie I.)

5°) La série $\left[n\,a_n\,x^{n-1}\right]_{n\geq 1}$ est-elle convergente pour x = - R ?

III. 1°) Soit $t\in[0,1]$ un réel fixé. On considère la série entière $\left[2^n t^n (1-t)^n x^n\right]_{n\geq 0}$

Déterminer en fonction de t le rayon de convergence de cette série.

2°) Montrer qu'il existe un réel strictement positif ρ indépendant de t tel que :
$\forall x\in\mathbb{R},\ |x|<\rho \Rightarrow (\forall t\in[0,1]$ la série entière $\left[2^n t^n (1-t)^n x^n\right]_{n\geq 0}$ converge).
ρ désigne désormais un réel satisfaisant à la condition précédente.

On pose $\forall x\in]-\rho,\rho[,\ \forall t\in[0,1]\ \ \phi(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n t^n (1-t)^n x^n$.

3°) Montrer que pour x fixé dans $]-\rho,\rho[$, la série des fonctions de la variable t :
$\left[2^n x^n t^n (1-t)^n\right]_{n\geq 0}$ converge uniformément sur [0,1].

4°) On pose $\forall x\in]-\rho,\rho[\quad J(x)=\int_0^1 \phi(x,t)\,dt$

Montrer que J est solution de (E) sur $]-\rho,\rho[$.